13.3 洛朗级数

13.3.1 洛朗级数

13.3.2 求函数的洛朗展开式

在上一节，讨论了解析函数在圆域$|z-z_0|<R$内可展为$z-z_0$的幂级数，但在实际问题中，常常遇到z_0处不解析的函数，那么在圆环域$0<|z-z_0|<R$内能否进行适当展开呢？

例如，$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在$z=0, z=1$都不解析，但在

圆环域：$0<|z|<1$内处处解析.

当$0<|z|<1$时，$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z}$

$$\overset{\because |z|<1}{=\!=\!=\!=\!=\!=} z^{-1}+1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

特点：上面这个级数含有负幂次项

本节将讨论在以z_0为中心的圆环域内解析的函数的级数表示法。

2、洛朗级数的定义

形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+ c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

是含有正负幂项的级数，其中z_0及c_n都是常数

正幂项(包括常数项)部分：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

负幂项部分：$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n$

$$= c_{-1}(z-z_0)^{-1} + \cdots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots$$

洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ 由两部分组成:

(1) 正幂部分 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ 称为洛朗级数的解析部分,它在 $|z-z_0| < R_2$ 内收敛

(2)负幂部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n$ 称为洛朗级数的主要部分,它在无界区域 $|z-z_0| > R_1$ 内收敛。

这是因为：若令 $\zeta = \dfrac{1}{z-z_0}$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n = c_{-1}\zeta + c_{-2}\zeta^2 + \cdots + c_{-n}\zeta^n + \cdots$$

(1) 正幂部分$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$在$|z-z_0|<R_2$内收敛

(2)负幂部分$\sum_{n=-1}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$

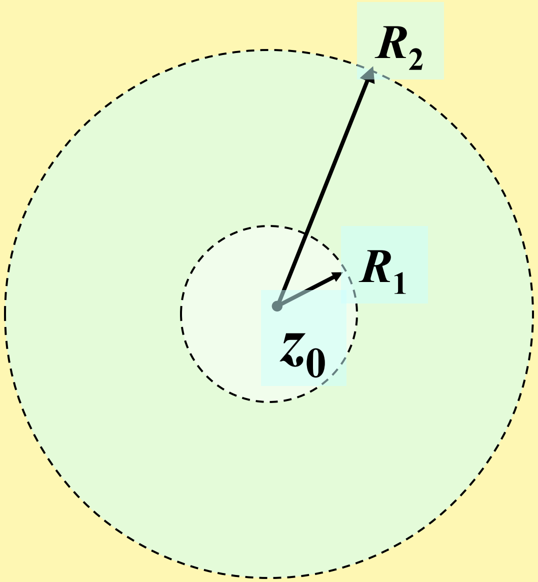
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n = c_{-1}\zeta + c_{-2}\zeta^2 + \cdots + c_{-n}\zeta^n + \cdots$$

对复变数ζ，级数为幂级数,设其收敛半径为R,

则当$|\zeta|<R$级数收敛,$|\zeta|>R$级数发散。

将$\zeta = \dfrac{1}{z-z_0}$代回得,$\left|\dfrac{1}{z-z_0}\right| < R \overset{令}{=} \dfrac{1}{R_1}$,则级数

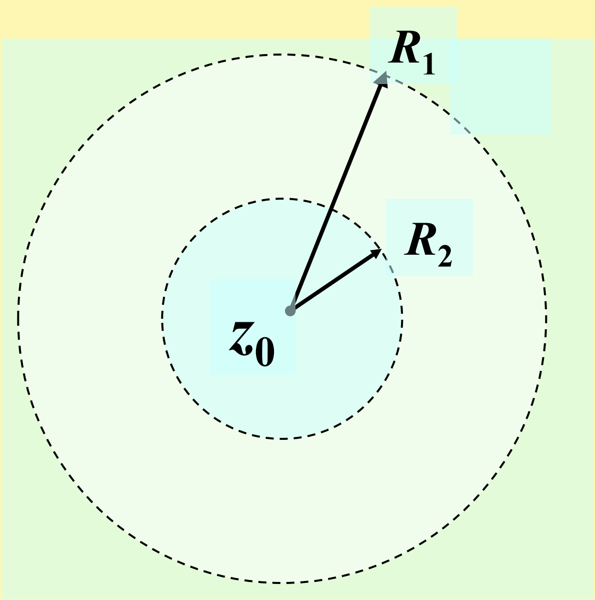
当$|z-z_0|>R_1$收敛，当$|z-z_0|<R_1$发散.



当$R_1 < R_2$时，正幂部分和负幂部分有公共收敛区域.

即$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$在圆环域：

$R_1 < |z-z_0| < R_2$内收敛



$R_1 > R_2$

无公共收敛域

称$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$

处处发散

注:(1)在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 的边界上,

$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ 可能有些点收敛，有些点发散。

(2) $R_1 \overset{\text{可以}}{=} 0 \quad R_2 \overset{\text{可以}}{=} \infty$,

收敛域可以形如：$0 < |z - z_0| < \infty$

$0 < |z - z_0| < R$ 或 $R < |z - z_0| < \infty$

(3) 级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 在 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的

和函数是解析的而且可以逐项求导和逐项求积.

洛朗展开定理

定理 设$f(z)$在$D: R_1 < |z-z_0| < R_2$内解析,则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

称为$f(z)$在$D: R_1 < |z-z_0| < R_2$内的*Laurent*级数

称为$f(z)$在$D: R_1 < |z-z_0| < R_2$内的*Laurent*展开式

其中:$c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

C是D内绕z_0的任何一条简单闭曲线.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$$

设$f(z)$在曲线C内解析，则：当$n\geq 0$时，

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_k\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

注: 当$n\geq 0$时,系数c_n形式上与高阶求导公式相同,但$c_n\neq\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$,$\because f(z)$在$C$内不是处处解析的.

13.3.2 求函数的洛朗展开式

定理 若函数$f(z)$在圆环域$D: R_1 < |z - z_0| < R_2$内可展为洛朗级数，则其展开式是唯一的.

有了$f(z)$在区域D内洛朗展开式的唯一性，可采用间接展开法来求函数在指定区域内的洛朗级数.

例1 将$\dfrac{\sin z}{z}$在$0<|z|<+\infty$展开成洛朗级数。

解

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots$$

$$0<|z|<+\infty$$

例2　求$f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$在$0<|z|<+\infty$内的洛朗展开式.

解:　$f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$在$0<|z|<+\infty$内处处解析,

又e^z在复平面内有展开式$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

而$\frac{1}{z}$在$0<|z|<+\infty$内解析,

将上式中的z代换成$\frac{1}{z}$可得　$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$,

$$z^3e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+3}}{n!}=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z^{-1}+\cdots,$$

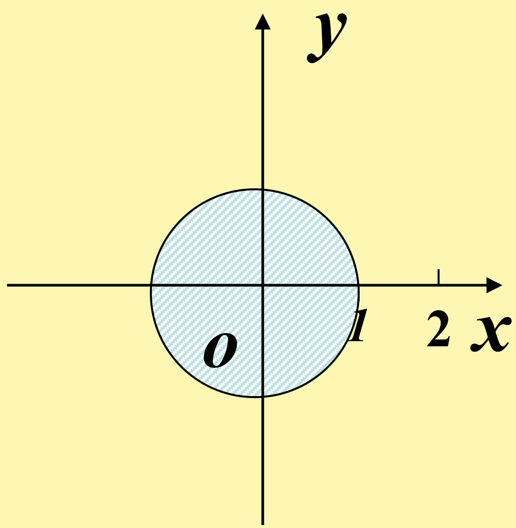
$$=\sum_{n=-\infty}^{3}\frac{1}{(-n+3)!}z^n$$

$0<|z|<+\infty$

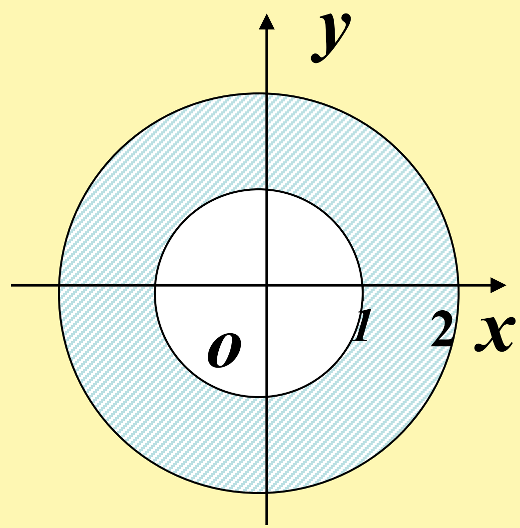
例3 将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在以下圆环域

$(i)\ 0<|z|<1;\quad (ii)\ 1<|z|<2;\quad (iii)\ 2<|z|<+\infty$

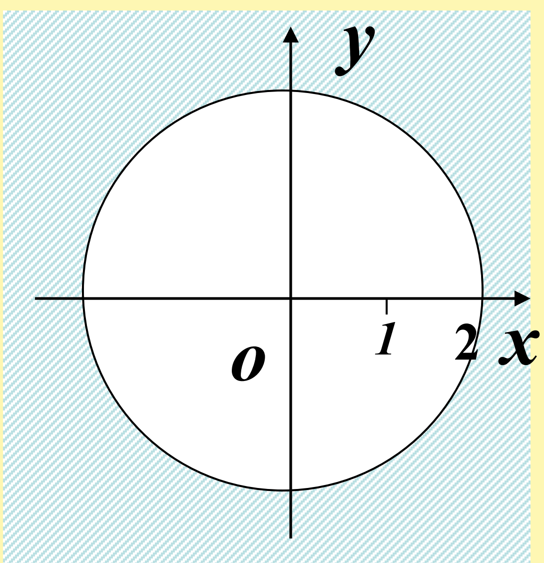
内展开成*Laurent*级数。



$(i)\ 0<|z|<1$



$(ii)\ 1<|z|<2$



$(iii)\ 2<|z|<+\infty$

例3　将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在下列圆环域内展开成$z$的洛朗级数：

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<2$ (3) $2<|z|<+\infty$

解： $f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}$，考虑它在各区域上的展开式.(1) 在$0<|z|<1$内，有$|z|<1$, $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$，故

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$ 此即为 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的泰勒展开式，是洛朗级数的特殊情况.

（2）在 $1<|z|<2$ 内，有 $\left|\frac{1}{z}\right|<1,\ \left|\frac{z}{2}\right|<1$，故

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}-\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

（3）在$2<|z|<+\infty$内，有$\left|\frac{2}{z}\right|<1$，$\left|\frac{1}{z}\right|<1$，故

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}+\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}$$

例4把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在指定的圆环域内展开成洛朗级数。

解:(1) $0<|z-1|<1$

$$\because f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{(z-1)}\cdot\frac{-1}{1-(z-1)}$$

$$\therefore f(z)=\left(\frac{-1}{z-1}\right)\cdot[1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots$$

$$+(z-1)^n+\cdots]$$

$$=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n \quad (0<|z-1|<1)。$$

(2) $1<|z-2|<\infty$ $\quad \because 1<|z-2|<\infty, \therefore \left|\frac{1}{z-2}\right|<1$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{(z-2)}\cdot\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}$$

$$=\frac{1}{(z-2)^2}\left[1-\left(\frac{1}{z-2}\right)+\left(\frac{1}{z-2}\right)^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+2}} \qquad (1<|z-2|<\infty)$$